**2. *a)*** *El rango de una matriz es el número de filas (coincidente con el número de columnas) linealmente independientes. Gracias a las propiedades de los determinantes, sabemos que* $|A|$ *es 0 si y sólo si en A, alguna fila (o columna) es combinación lineal de las otras. Así:*

$$|A| = -a^4 + 2a^3 - 2a + 1 \Rightarrow -a^4 + 2a^3 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow a = 1,\ a = -1$$

- *Si* $a \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}$, *entonces* $|A| \neq 0$, *lo que implica que* $F_1$, $F_2$, $F_3$ *y* $F_4$ *son linealmente independientes y por tanto rg A=4*
- $a = 1$

  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $F_1 = F_2 = F_3 = F_4$. *Luego rgA=1*

- $a = -1$

  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. $|A| = 0 \Rightarrow$ *hay al menos una combinación lineal* $\Rightarrow rgA \neq 4$

  *Consideramos menores de orden tres:*

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$, *luego* $F_1$, $F_2$ *y* $F_4$ *son linealmente independientes y por tanto rg A=3.*

***b)***

*Los sistemas homogéneos son siempre compatibles pues rgA=rgA*. Por el apartado a), sabemos que para a=1 el rango de ambas matrices es 1 y como hay 4 incógnitas, debemos parametrizar 3.*

*Así:* $(x,\ y,\ z,\ t) = (-\lambda - \mu - \nu,\ \lambda,\ \mu,\ \nu),\ \forall \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$.

*c) En este caso, sabemos que el rango de ambas matrices es tres, así que debemos parametrizar una incógnita. Resolviendo por Cramer, obtenemos:*

$$(x,\ y,\ z,\ t) = (0,\ \lambda,\ 0,\ \lambda),\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$$