OPCIÓN A

Ejercicio 1. **Calificación máxima: 3** puntos.
Dada la función

$$f(x) = \frac{x}{x^2-4} + \frac{\ln(x+1)}{x+1},$$

donde ln denota el logaritmo neperiano, se pide:

a) (1'5 puntos) Determinar el dominio de f y sus asíntotas.
b) (0'75 puntos) Calcular la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 0$.
c) (0'75 puntos) Calcular $\int f(x)\,dx$.

SOLUCIÓN:

a) $\ln(x+1) \Rightarrow x+1>0 \Rightarrow x>-1$

Por otro lado, tenemos en cuenta los denominadores: $\begin{matrix} x^2-4=0 \Rightarrow x=\pm 2 \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \end{matrix}$

Finalmente: $Dom\ f = (-1,\infty)-\{2\}$

Asíntotas verticales:

Gracias al dominio de definición, vemos que las únicas candidatas a ser asíntotas verticales son $x=2$ *y* $x=-1$.*Lo comprobamos*

$x=2$

$$\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{x}{x^2-4}+\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)=\frac{2}{0}+\frac{\ln 3}{3}(ind)\Rightarrow \lim_{x\to 2^+}\left(\frac{x}{x^2-4}+\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-}\left(\frac{x}{x^2-4}+\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)=-\infty$$

$x=2$ *es asíntota vertical.*

$x=-1$, *la función sólo está definida por la derecha, así:*

$$\lim_{x\to -1^-}\left(\frac{x}{x^2-4}+\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)=\frac{1}{3}-\infty=-\infty$$

$x=-1^+$ *es asíntota vertical.*

Asíntotas horizontal, asíntota oblicua:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x^2-4}+\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)=0$$ *luego hay asíntota horizontal en y=0. No hay oblicua.*

b) *En primer lugar, la ecuación de la recta tangente en su forma punto-pendiente es:*

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

$$x_0=0$$

$$f(x_0)\Rightarrow f(0)=0$$

$$f'(x_0)\Rightarrow f'(x)=\frac{-x^2-4}{\left(x^2-4\right)^2}+\frac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2}\underset{Para\,x=0}{\Rightarrow} f'(0)=\frac{3}{4}$$

Luego la recta tangente es: $y-0=\frac{3}{4}(x-0)\Rightarrow y=\frac{3}{4}x$

c) $$\int\frac{x}{x^2-4}+\frac{\ln(x+1)}{x+1}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2-4}dx+\int\frac{\ln(x+1)}{x+1}dx=\frac{\ln\left|x^2-4\right|}{2}+\frac{\ln^2(x+1)}{2}+C$$

Ejercicio 2. **Calificación máxima: 3 puntos.**

a) (2 puntos) Discutir, según los valores de m, el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} 4x + 3y + (m-1)z = 0 \\ x - 2y + mz = 1 \\ 5x + my + z = 1 \end{cases}$$

b) (1 punto) Resolver el sistema anterior para el caso $m=1$.

SOLUCIÓN:

Las matrices asociadas al sistema son:

$$A^*=\left(\underbrace{\begin{matrix}4 & 3 & m-1\\ 1 & -2 & m\\ 5 & m & 1\end{matrix}}_{A}\left|\begin{matrix}0\\1\\1\end{matrix}\right.\right)\;;$$

Para discutir el sistema en función del parámetro a nos apoyaremos en el teorema de Rouché-Fröbenius que se basa en comparar los rangos de A y A permitiéndonos clasificar dicho sistema. En primer lugar, el rango de una matriz es el número de filas (coincidente con el número de columnas) linealmente independientes. Por tanto* $rgA\le rgA^*\le 3$ ***(1)****. Además, gracias a las propiedades de los determinantes, sabemos que* $|A|$ *es 0 si y sólo si en A alguna fila (o columna) es combinación lineal de las otras. Así que nos ayudaremos de determinantes para estudiar el rango de las matrices:*

$$|A|=-3m^2+24m-21\Rightarrow -3m^2+24m-21=0\Rightarrow m=1,\;\; m=7$$

a) Discutimos:

- *Si* $m \in \mathbb{R} - \{1, 7\}$, *entonces* $|A| \neq 0$, *lo que implica que* F_1, F_2 *y* F_3 *son linealmente independientes y por tanto* $\operatorname{rg}(A) = 3 \underset{\substack{\uparrow \\ rgA \leq rgA^*}}{=} rg(A^*)$ *Por el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es Compatible Determinado.*

- *Si* $m = 1$
  Rango de la matriz A

  $$A^* = \left(\underbrace{\begin{matrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{matrix}}_{A}\left|\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}\right.\right) \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow \textit{hay al menos una combinación lineal}$$

  $\Rightarrow rgA \neq 3$

  $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ *Luego* F_2 *y* F_1 *son linealmente independientes y por tanto* $rgA = 2$

  Rango de la matriz Ampliada*:*

  Como $F_1 + F_2 = F_3$, $rgA^* \neq 3$ *y como* $rgA = 2$, *por (1) concluimos que* $rgA^* = 2$

  Por el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es Compatible indeterminado.

- *Si* $m = 7$
  Rango de la matriz A

  $$A^* = \left(\underbrace{\begin{matrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & 7 \\ 5 & 7 & 1 \end{matrix}}_{A}\left|\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}\right.\right) \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow \textit{hay al menos una combinación lineal}$$

  $\Rightarrow rgA \neq 3$

  $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ *Luego* F_2 *y* F_1 *son linealmente independientes y por tanto* $rgA = 2$

  Rango de la matriz Ampliada*:*

  $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & 7 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ *luego las tres filas son linealmente independientes y por tanto* $rgA^* = 3$. *Por el teorema de Rouché-Frobenius, el sistema es Incompatible.*

b) $m=1$, *por el apartado a) sabemos que el sistema es compatible indeterminado. Debemos eliminar una ecuación y parametrizar una incógnita. Así, obtenemos mediante Cramer:*

$$(x,y,z)=(7+\lambda,\quad -2-\lambda,\quad \lambda) \qquad \lambda\in\mathbb{R}$$

$$\begin{cases}4x+3y=0\\ x-2y+z=1\\ 5x+y+z=1\end{cases}\equiv\begin{cases}4x+3y=0\\ x-2y+z=1\end{cases}\underset{z=\lambda}{\Rightarrow}\begin{cases}4x+3y=0\\ x-2y=1-\lambda\end{cases}\Rightarrow B^*=\left(\underbrace{\begin{matrix}4&3\\1&-2\end{matrix}}_{B}\left|\begin{matrix}0\\1-\lambda\end{matrix}\right.\right)$$

Aplicando el método de Cramer, obtenemos

$$x=\frac{\begin{vmatrix}0&3\\1-\lambda&-2\end{vmatrix}}{-11}=\frac{-3+3\lambda}{-11}=\frac{3+3\lambda}{11} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix}4&0\\1&1-\lambda\end{vmatrix}}{-11}=\frac{4-4\lambda}{-11}=\frac{-4+4\lambda}{11}$$

Solución:

$$(x,y,z)=\left(\frac{3+3\lambda}{11},\frac{4+4\lambda}{11},\lambda\right);\quad \lambda\in\mathbb{R}$$

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

a) (1 punto) Dados los vectores $\vec{u}=(2,3,4)$, $\vec{v}=(-1,-1,-1)$ y $\vec{w}=(-1,\lambda,-5)$, encontrar los valores de λ que hacen que el paralelepípedo P generado por $\vec{u},\vec{v}$ y $\vec{w}$ tenga volumen 6.

b) (1 punto) Obtener la ecuación de la recta incluida en el plano $z=0$, con dirección perpendicular a $\vec{u}=(2,-1,4)$ y que pasa por el punto $(1,1,0)$.

SOLUCIÓN:

a) *El volumen del paralelepípedo formado por formado por los vectores* $\vec{u}=(2,\ 3,\ 4)$, $\vec{v}=(-1,\ -1,\ -1)$ *y* $\vec{w}=(-1,\ \lambda,\ -5)$ *se puede obtener a partir de* $V=\left|\left[\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}\right]\right|$

Así: $$V=\left\|\begin{matrix}2&3&4\\-1&-1&-1\\-1&\lambda&-5\end{matrix}\right\|=|-2\lambda-6|\,u^3$$

Y como queremos que el volumen sea 6, concluimos que: $|-2\lambda-6|=6$. *Deshacemos el valor absoluto:*

- *Si* $-2\lambda-6>0\Rightarrow -2\lambda-6=2\Rightarrow \lambda=-4$
- *Si* $-2\lambda-6<0\Rightarrow 2\lambda+6=2\Rightarrow \lambda=-2$

Conclusión: *Hay dos valores de* λ *(* $\lambda=-2$ *y* $\lambda=-4$ *) que hacen que el volumen del paralelepípedo sea 6* u^3.

b) *La recta pedida tiene como dirección un vector perpendicular al normal del plano y a* $\vec{u}$

Así, $\vec{v}_r = \vec{n} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \vec{i} + 2\vec{j} = (1, \quad 2, \quad 0)$

Finalmente, la recta pedida es:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Dados el plano $\pi \equiv x - 2y + 2z + 1 = 0$ y la superficie esférica $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 9$, hallar los planos tangentes a la esfera que son paralelos al plano π.

El centro y radio de la superficie esférica son:

$C(1, \quad 1, \quad 2)$

$r = 3u$

Que dos planos sean paralelos, implica que sus vectores normales coinciden. Es decir, la familia de los planos paralelos a π *presentan la siguiente ecuación:*

$\Pi \equiv x - 2y + 2z + D = 0$

Por tanto, los planos pedidos son de la forma:

$\pi' \equiv x - 2y + 2z + D' = 0 \quad y \quad \pi'' \equiv x - 2y + 2z + D'' = 0$

Por otra parte, como queremos que sean tangentes a la esfera, debe verificarse

$d(\pi', S) = d(\pi'', S) = r$

Así: $d(\pi', C) = \dfrac{|1 - 2\cdot 1 + 2\cdot 2 + D|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \dfrac{|3 + D|}{3} \Rightarrow \dfrac{|3 + D|}{3} = 3$

$|3 + D| = 9$. *Deshacemos el valor absoluto:*

- *Si* $3 + D > 0 \Rightarrow 3 + D = 9 \Rightarrow D = 6$
- *Si* $3 + D < 0 \Rightarrow -3 - D = 9 \Rightarrow D = -12$

Así pues, los planos son:

$\pi' \equiv x - 2y + 2z + 6 = 0 \quad y \quad \pi'' \equiv x - 2y + 2z - 12 = 0$
