CORRECCION EXAMEN EVAU MADRID JUNIO 2017 EVALUACIÓN

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Considérense las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -k \\ 1 & -2 & 1 \\ k & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Discútase para qué valores del parámetro real k la matriz A tiene matriz inversa.

b) Determínese para $k = 0$ la matriz X que verifica la ecuación $A \cdot X = B$.

Solución:

a) La matriz A tiene inversa si $|A| \neq 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -k \\ 1 & -2 & 1 \\ k & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 2k + 2k - (2k^2 - 2 + 2) = -2k^2 + 2$$

$$-2k^2 + 2 = 0 \ \rightarrow \ k_1 = 1 \ \text{y} \ k_2 = -1$$

- Si $k = 1$ o $k = -1 \ \rightarrow \ \nexists \ A^{-1}$
- Si $k \in \mathcal{R} - \{-1,1\} \ \rightarrow \ \exists \ A^{-1}$

b) $AX = B \ \rightarrow \ A^{-1}AX = A^{-1}B \ \rightarrow IX = A^{-1}B \ \rightarrow x = A^{-1}B$

Calculo A^{-1}

$$|A| = -2 \qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad Adj\ A^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot AdjA^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -1/2 & 1/2 & 2 \\ -1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Considérese la región del plano S definida por:

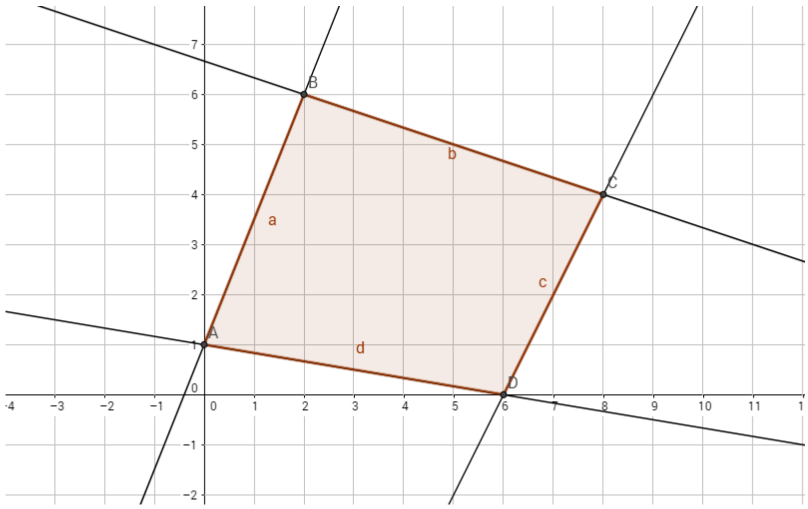
$$S = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x + 6y \geq 6 \quad ; \quad 5x - 2y \geq -2 \quad ; \quad x + 3y \leq 20 \quad ; \quad 2x - y \leq 12\right\}.$$

a) Represéntese gráficamente la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Determínense los puntos en los que la función $f(x, y) = 4x - 3y$ alcanza sus valores máximo y mínimo en S, indicando el valor de $f(x, y)$ en dichos puntos.

Solución:

a)



Vértices:

A=(0,1) C=(8,4)

B=(2,6) D=(6,0)

b) $f(A) = 4 \cdot 0 - 3 \cdot 1 = -3$

$f(B) = 4 \cdot 2 - 3 \cdot 6 = -10$

$f(C) = 4 \cdot 8 - 3 \cdot 4 = 20$

$f(D) = 4 \cdot 6 - 3 \cdot 0 = 24$

El máximo es de 24 y se alcanza en el punto $D = (6{,}0)$ y el mínimo es de -10 y se alcanza en el punto $B = (2{,}6)$

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)

a) Determínese el valor de la derivada de la función $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x}$ en el punto de abscisa $x = 0$.

b) Estúdiense las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{x^3}{1-x^2}$.

Solución:

a) $f'(x) = \frac{e^x \cdot (1+x) - e^x \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{e^x \cdot x}{(1+x)^2}$

$f'(0) = \frac{e^0 \cdot 0}{(1+0)^2} = 0$

b) $f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$

Asíntotas verticales: $1 - x^2 = 0 \ \rightarrow \ x^2 = 1 \ \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

$\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \infty$ $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$

Asíntotas horizontales: $\lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{1-x^2} = \infty$ No tiene

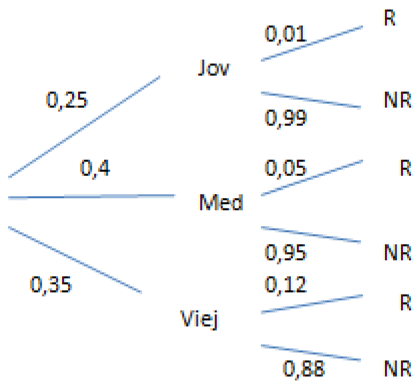
Asíntota oblicua: Se realiza división de polinomios $\frac{x^3}{1-x^2}$ y el cociente resulta $-x \ \rightarrow y = -x$, siendo esta la asíntota oblicua.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)
Una empresa de reparto de paquetería clasifica sus furgonetas en función de su antigüedad. El 25 % de sus furgonetas tiene menos de dos años de antigüedad, el 40 % tiene una antigüedad entre dos y cuatro años y el resto tiene una antigüedad superior a cuatro años. La probabilidad de que una furgoneta se estropee es 0'01 si tiene una antigüedad inferior a dos años; 0'05 si tiene una antigüedad entre dos y cuatro años y 0'12 si tiene una antigüedad superior a cuatro años. Se escoge una furgoneta al azar de esta empresa. Calcúlese la probabilidad de que la furgoneta escogida:

a) Se estropee.

b) Tenga una antigüedad superior a cuatro años sabiendo que no se ha estropeado.

Solución:



a) Teorema de la Probabilidad Total

$$P(R) = P(R/Jov)\cdot P(Jov) + P(R/Med)\cdot P(Med) + P(R/Viej)\cdot P(Viej) =$$
$$= 0{,}01\cdot 0{,}25 + 0{,}05\cdot 0{,}4 + 0{,}12\cdot 0{,}35 = 0{,}0645$$

b) Teorema de Bayes

$$P(Viej/NR) = \frac{P(NR/Viej)\cdot P(Viej)}{P(NR)} = \frac{0{,}88\cdot 0{,}35}{1-0{,}0645} = 0{,}329$$

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
El peso en canal, en kilogramos (kg), de una raza de corderos a las seis semanas de su nacimiento se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 0'9 kg.

a) Se tomó una muestra aleatoria simple de 324 corderos y el peso medio observado fue $\overline{x}$ =7'8 kg. Obténgase un intervalo de confianza con un nivel del 99'2 % para μ.

b) Determínese el tamaño mínimo que debería tener una muestra aleatoria simple de la variable para que el correspondiente intervalo de confianza para μ al 95 % tenga una amplitud a lo sumo de 0'2 kg.

Solución:

$$X \equiv N(\mu; 0{,}9)$$

a) $\bar{X} \equiv N(7{,}8; \frac{0{,}9}{\sqrt{324}}) \equiv N(7{,}8; 0{,}05)$

$1-\alpha = 0{,}992$ $\quad$ $I.C = \left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

$1-\alpha/2 = 0{,}996$ $\quad$ $I.C = \left(7{,}8 - 2{,}65\cdot\frac{0{,}9}{\sqrt{324}}, 7{,}8 + 2{,}65\cdot\frac{0{,}9}{\sqrt{324}}\right)$

$Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}65$ $\quad$ $I.C = (7{,}668; 7{,}933)$

b) $1-\alpha = 0{,}95$

$1-\alpha/2 = 0{,}975$

$Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow 0{,}1 = 1{,}96\cdot\frac{0{,}9}{\sqrt{n}} \rightarrow n = \left(\frac{1{,}96\cdot 0{,}9}{0{,}1}\right)^2$$

$n = 311{,}17 \ \rightarrow n = 312\ corderos$

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Considérese el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x & -ay & +2z & =0 \\ ax & -4y & -4z & =0 \\ (2-a)x & +3y & -2z & =0 \end{array}\right.$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro a.
b) Resuélvase para $a = 3$.

Solución:

a) $M^* = \begin{pmatrix} 1 & -a & 2 & | & 0 \\ a & -4 & -4 & | & 0 \\ 2-a & 3 & -2 & | & 0 \end{pmatrix}$ Sistema homogéneo $\rightarrow Rango\ M = Rango\ M^*$

$\rightarrow Sistema\ compatible$

$|M| = +8 + 6a - 4a^2 + 16 - 8a - 2a^2 + 12 = -6a^2 + 6a + 36 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow a = -2\ y\ a = 3$

- Si $a \neq -2\ y\ a \neq 3\ \ |M| \neq 0 \ \rightarrow\ Rango\ M = 3 = Rango\ M^*$ = nº de incógnitas. Por el Teorema de Rouché es un sistema compatible determinado y tiene una única solución.
- Si $a = -2$ $|M| = 0$; $\begin{vmatrix} -4 & -4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \ \rightarrow\ Rango\ M = 2 = Rango\ M^* <$ nº de incógnitas, por el Teorema de Rouché es un sistema compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones
- Si $a = 3$ $|M| = 0$; $\begin{vmatrix} -4 & -4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \ \rightarrow\ Rango\ M = 2 = Rango\ M^* <$ nº de incógnitas, por el Teorema de Rouché es un sistema compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones

b) Para $a = 3$ es un sistema compatible indeterminado por el apartado a)

$\begin{cases} 3x - 4y - 4z = 0 \\ -x + 3y - 2z = 0 \end{cases} \rightarrow z = \lambda \ \rightarrow \begin{cases} 3x - 4y = 4\lambda \\ -x + 3y = 2\lambda \end{cases} \rightarrow\ y = \dfrac{10\lambda}{5} = 2\lambda$

Solución $\begin{cases} x = 4\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Considérese la función real de variable real:

$$f(x) = x^3 - 3x.$$

a) Calcúlense $\quad \text{lím}_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{1-x^3} \quad$ y $\quad \text{lím}_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$.
b) Estúdiense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

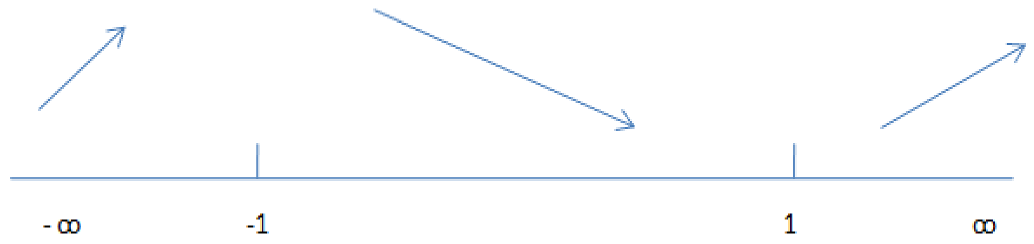
Solución:

a) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-3x}{1-x^3} = \frac{\infty}{\infty}\ Indet.\ \rightarrow\ \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{-x^3} = -1$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3-3x}{x} = \dfrac{0}{0}\ Indet.\ \rightarrow\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 - 3 = -3$

b) $f'(x) = 3x^2 - 3$

$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \ \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases} \rightarrow Posibles\ extremos$



$(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ $f(x)$ es creciente porque $f'(x)>0$
$(-1,1)$ $f(x)$ es decreciente porque $f'(x)<0$

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x+2} & \text{si } x\le 0\\[2ex] x+2 & \text{si } x>0\end{cases}$$

a) Estúdiese la continuidad de $f(x)$ en $\mathbb{R}$.

b) Calcúlese $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)dx$.

Solución:

a)

- Continuidad en $x=0$

$$\mathrm{f}(0)=\frac{2}{0+2}=1$$

$$\begin{cases}\lim_{x\to 0^+} x+2=2\\ \lim_{x\to 0^-}\frac{2}{x+2}=1\end{cases}\rightarrow f \text{ presenta una discontinuidad inevitable de salto finito en } x=0$$

- Continuidad en $x=-2$

$$\begin{cases}lim_{x\to -2^+}\frac{2}{x+2}=+\infty\\ lim_{x\to -2^-}\frac{2}{x+2}=-\infty\end{cases}\rightarrow f \text{ presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito en}$$

$x=-2$

- En el resto de los puntos es continua

b) $\int_{-1}^{0} f(x)dx=\int_{-1}^{0}\frac{2}{x+2}dx=2\cdot\ln|x+2|]_{-1}^{0}=2\cdot\ln 2-2\cdot\ln 1=\ln 4\quad u^2$

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)
El 30 % de los individuos de una determinada población son jóvenes. Si una persona es joven, la probabilidad de que lea prensa al menos una vez por semana es 0'20. Si una persona lee prensa al menos una vez por semana, la probabilidad de que no sea joven es 0'9. Se escoge una persona al azar. Calcúlese la probabilidad de que esa persona:

a) No lea prensa al menos una vez por semana.

b) No lea prensa al menos una vez por semana o no sea joven.

Solución:

Datos
$P(J)=0{,}3$
$P(Pr/J)=0{,}2$
$P(NJ/Pr)=0{,}9$

a) $P(Pr/J) = \frac{P(Pr\cap J)}{P(J)} \rightarrow P(Pr\cap J) = P(Pr/J)\cdot P(J) = 0{,}2\cdot 0{,}3 = 0{,}06$

$P(NJ/Pr) = \dfrac{P(NJ\cap Pr)}{P(Pr)} \rightarrow 0{,}9 = \dfrac{P(\mathrm{Pr}) - P(J\cap \mathrm{Pr})}{P(Pr)} \rightarrow 0{,}9\cdot P(\mathrm{Pr}) - P(\mathrm{Pr}) = 0{,}06 \rightarrow$

$\rightarrow P(Pr) = 0{,}6$

b) $P(\overline{Pr}\cup NJ) = P(\overline{Pr\cap J}) = 1 - P(Pr\cap J) = 0{,}94$

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)

El peso en toneladas (T) de los contenedores de un barco de carga se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media μ y desviación típica σ = 3T. Se toma una muestra aleatoria simple de 484 contenedores.

a) Si la media de la muestra es $\overline{x}$ =25'9T, obténgase un intervalo de confianza con un nivel del 90 % para μ.

a) Supóngase ahora que μ = 23T. Calcúlese la probabilidad de que puedan transportarse en un barco cuya capacidad máxima es de 11000T.

Solución:

$X \equiv N(\mu, 3)$

a) $\bar{X} \equiv N(25{,}9; \frac{3}{\sqrt{484}})$

$1 - \alpha = 0{,}9 \qquad I.C = \left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

$1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0{,}95 \qquad I.C = \left(25{,}9 - 1{,}645\cdot\dfrac{3}{\sqrt{484}}; 25{,}9 + 1{,}645\cdot\dfrac{3}{\sqrt{484}}\right)$

$Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}645 \qquad I.C = (25{,}676; 26{,}124)$

b) $\frac{11000}{484} = 22{,}72$

$\bar{X} \equiv N\left(23; \dfrac{3}{\sqrt{484}}\right)$

$\bar{X} \equiv N(23; 0{,}136)$

$P(\bar{x} < 22{,}72) = P\left(\dfrac{\bar{x} - \mu}{\sigma} < \dfrac{22{,}72 - 23}{0{,}136}\right) = P(Z < -2{,}06) = 1 - P(Z < 2{,}06) =$

$= 1 - 0{,}9803 = 0{,}0197$