DÍAZ BALAGUER
CENTRO DE ESTUDIOS

CORRECCIÓN EXAMEN EVAU MADRID JUNIO 2017

MATEMÁTICAS II

OPCIÓN A

Ejercicio 1 . **Calificación máxima:** 3 puntos.

Dado el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x + ay + z = a, \\ x - 4y + (a+1)z = 1, \\ 4y - az = 0, \end{cases}$ se pide:

a) (2 puntos) Discutirlo en función de los valores del parámetro real a.
b) (0.5 puntos) Resolver el sistema para $a = 1$.
c) (0.5 puntos) Resolver el sistema para $a = 2$.

Solución:

a) $M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a & 1 & a \\ 1 & -4 & a+1 & 1 \\ 0 & 4 & -a & 0 \end{array}\right)$

$|M| = 8a + 4 + a^2 - 8a - 8 = a^2 - 4$

$|M| = 0 \rightarrow a^2 - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -2 \end{cases}$

Caso 1: Si $a \neq 2$ y $a \neq -2$ $|M| \neq 0 \rightarrow Rango\ M = 3$

Como $Rango\ M^* \geq Rango\ M$ y $Rango\ M^* \leq 3 \rightarrow RangoM^* = 3$

$RangoM^* = RangoM = 3$ =nº de incógnitas, por el Teorema de Rouché es un sistema compatible determinado con única solución.

Caso 2: Si $a = 2$ $|M| = 0 \rightarrow RangoM < 3$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right)$ $C_1 = C_4 \rightarrow Rango\ M = Rango\ M^*$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$ $RangoM = 2 <$ nº de incógnitas

Por el teorema de Rouché es un sistema compatible indeterminado con infinitas soluciones.

Caso 3: Si a$= -2$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right)$ $|M| = 0 \rightarrow RangoM < 3$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} \neq 0\ Rango\ M = 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0\ RangoM^* = 3$$

$RangoM \neq RangoM^*$. Por el teorema de Rouché, es un sistema incompatible y no tiene solución.

b) Para $a=1$ es un sistema compatible determinado (apartado a) que se puede resolver por la Regla de Cramer.

$|M|=-3$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -4 & 2\\ 0 & 4 & 1\end{vmatrix}}{|M|}=\frac{1}{-3}=-\frac{1}{3}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 4 & 0 & 1\end{vmatrix}}{|M|}=\frac{-1}{-3}=\frac{1}{3}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & -4 & 1\\ 4 & 4 & 0\end{vmatrix}}{|M|}=\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3}$$

c) Para $a=2$ es un sistema compatible indeterminado por el apartado a).

$$\begin{cases}2x+2y+z=2\\ x-4y+3z=1\end{cases}\rightarrow x=\lambda\rightarrow\begin{cases}2y+z=2-2\lambda\\ -4y+3z=1-\lambda\end{cases}\rightarrow z=1-\lambda\rightarrow y=1-\lambda$$

Solución: $\begin{cases}x=\lambda\\ y=1-\lambda\\ z=1-\lambda\end{cases}$

Ejercicio 2. **Calificación máxima:** 3 puntos.

Dados los puntos $P(1,-2,1)$, $Q(-4,0,1)$, $R(-3,1,2)$, $S(0,-3,0)$, se pide:

a) (1 punto) Hallar la ecuación del plano que contiene a P, Q y R.

b) (1 punto) Estudiar la posición relativa de la recta r, que pasa por los puntos P y Q, y la recta s, que pasa por R y S.

c) (1 punto) Hallar el área del triángulo formado por los puntos P, Q y R.

Solución:

a) $\overrightarrow{PQ}=(-5,2,0)$

$\overrightarrow{PR}=(-4,3,1)$

$$\begin{vmatrix}x-1 & y+2 & z-1\\ -5 & 2 & 0\\ -4 & 3 & 1\end{vmatrix}=0\rightarrow 2(x-1)+5(y+2)-7(z-1)=0$$

$2x+5y-7z+15=0$

b) $\overrightarrow{PQ}=(-5,2,0)$

$\overrightarrow{PR}=(3,-4,2)$

$\overrightarrow{PS}=(-1,-1,-1)$

$-\frac{5}{3}\neq\frac{2}{4}$ No son proporcionales → se cruzan o se cortan.

$$\begin{vmatrix}-5 & 2 & 0\\ 3 & -4 & -2\\ -1 & -1 & -1\end{vmatrix}=0\rightarrow RangoA=2$$ Las rectas se cortan.

c) $A=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ}\,x\,\overrightarrow{PR}\right|=\frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ -5 & 2 & 0\\ -4 & 3 & 1\end{matrix}\right\|=\frac{\sqrt{4+25+49}}{2}=\frac{\sqrt{78}}{2}u^2$

Ejercicio 3. **Calificación máxima:** 2 puntos.

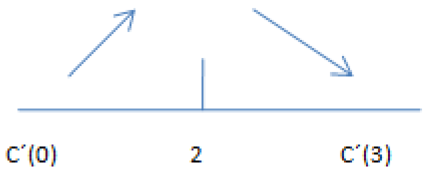
Se administra una medicina a un enfermo y t horas después la concentración en sangre del principio activo viene dada por $c(t) = te^{-t/2}$ miligramos por mililitro. Determine el valor máximo de $c(t)$ e indique en qué momento se alcanza dicho valor máximo. Sabiendo que la máxima concentración sin peligro es de 1 mg/ml, señale si en algún momento hay riesgo para el paciente.

Solución:

$c(t) = te^{-t/2}$

$c´(t) = e^{-t/2} + e^{-t/2} \cdot t \cdot (-1/2) = e^{-t/2}\left(1 - \frac{t}{2}\right)$

$c´(t) = 0 \ \rightarrow t = 2$ posible máximo



En $t = 2$ se alcanza el máximo cuyo valor es $c(2) = 2e^{-1} = {}^{2}/_{e}\ {}^{mg}/_{ml}$

Como $c(2) = 2/e = 0{,}74 < 1$ No hay riesgo para el paciente.

Ejercicio 4. **Calificación máxima:** 2 puntos.

Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 6}{x - 2}$, se pide:

a) (0.5 puntos) Determinar su dominio y asíntotas verticales.

b) (0.5 puntos) Calcular $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

c) (1 punto) Calcular $\displaystyle\int_3^5 f(x)\, dx$.

Solución:

a) $x - 2 = 0 \ \rightarrow x = 2 \ \rightarrow Df = \mathcal{R} - \{2\}$

Asíntota vertical $x = 2$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + x + 6}{x - 2} = \frac{k}{0} = \pm\infty$$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{x^2+x+6}{x-2}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+x+6}{x^2-2x} = \dfrac{\infty}{\infty}\ INDET \ \rightarrow \ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$

c) $\int_3^5 \frac{x^2+x+6}{x-2} dx = \int_3^5 x + 3\ dx + \int_3^5 \frac{12}{x-2} dx = \frac{x^2}{2} + 3x]_3^5 + 12\ln|x-2|]_3^5 =$

$= \left(\frac{25}{2} + 15\right) - \left(\frac{9}{2} + 9\right) + 12\ln 3 - 12\ln 1 = (14 + 12\ln 3)ud^2$

OPCIÓN B

Ejercicio 1 . **Calificación máxima:** 3 puntos.

Dadas las funciones $f(x) = \frac{2}{x}$ y $g(x) = \text{sen}\,(x)$, se pide:

a) (1 punto) Calcular $\lim_{x\to 0}\left(f(x) - \frac{2}{g(x)}\right)$.

b) (0.75 puntos) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(\frac{1}{2}, 4)$.

c) (1.25 puntos) Calcular el área delimitada por la curva $y = f(x)$ y la recta $y = -x + 3$.

Solución:

a) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{x} - \frac{2}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x - 2x}{x\sin x} = \frac{0}{0}\ INDET$ $\rightarrow$ Regla de L´Hôpital $\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x - 2}{\sin x + x\cos x} =$

$\frac{0}{0}\ INDET$ $\rightarrow$ Aplico de nuevo la Regla de L´Hôpital $\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin x}{\cos x + \cos x - x\sin x} = \frac{0}{2} = 0$

b) $x_0 = \frac{1}{2}$ $\quad y_0 = 4$ $\quad f'(x) = -\frac{2}{x^2}$ $\quad f'\left(\frac{1}{2}\right) = -8$

Ec. Recta tangente: $y - y_0 = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$

$y - 4 = -8\cdot\left(x - \frac{1}{2}\right) \rightarrow y = -8x + 8$

c) $\frac{2}{x} = -x + 3 \rightarrow 2 = -x^2 + 3x \rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

$\left|\int_1^2 -x + 3 - \frac{2}{x}dx\right| = -\frac{x^2}{2} + 3x - 2\ln|x|]_1^2 = -2 + 6 - 2\ln 2 + \frac{1}{2} - 3 - 2\ln 1 =$

$= \left(\frac{3}{2} - \ln 4\right)u^2$

Ejercicio 2 . **Calificación máxima:** 3 puntos.

Dadas las matrices

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix},\quad J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

se pide:

a) (1 punto) Determinar la matriz P^{-1}, inversa de la matriz P.

b) (1 punto) Determinar la matriz B^{-1}, inversa de la matriz $B = P^{-1}J^{-1}$.

c) (1 punto) Calcular el determinante de la matriz A^2, siendo $A = PJP^{-1}$.

Solución:

a) $|P| = 4 + 8 + 9 - (4 + 6 + 12) = -1$

$P^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad AdjP^t = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ $\quad P^{-1} = \frac{1}{|P|}AdjP^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

b) $B = P^{-1}\cdot J^{-1} \rightarrow B^{-1} = J\cdot P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

c) $A^2 = A\cdot A = (PJP^{-1})\cdot(PJP^{-1}) = P\cdot J\cdot J\cdot P^{-1}$

$|A^2| = |P\cdot J^2\cdot P^{-1}| \rightarrow |A^2| = |P|\cdot|J|\cdot|J|\cdot\frac{1}{|P|} \rightarrow |A^2| = -1\cdot|J|\cdot|J|\cdot\frac{1}{-1} \rightarrow$

$\rightarrow |A^2| = -1\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-1) \rightarrow |A^2| = 4$

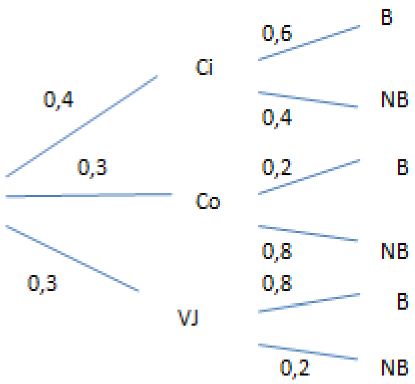
Ejercicio 4. **Calificación máxima:** 2 puntos.

El 40% de los sábados Marta va al cine, el 30% va de compras y el 30% restante juega a videojuegos. Cuando va al cine, el 60% de las veces lo hace con sus compañeros de baloncesto. Lo mismo le ocurre el 20% de las veces que va de compras, y el 80% de las veces que juega a videojuegos. Se pide:

a) (1 punto) Hallar la probabilidad de que el próximo sábado Marta no quede con sus compañeros de baloncesto.

b) (1 punto) Si se sabe que Marta ha quedado con los compañeros de baloncesto, ¿cuál es la probabilidad de que vayan al cine?

Solución:



a) Teorema de Probabilidad Total

$P(NB) = P(NB/Ci) \cdot P(Ci) + P(NB/Co) \cdot P(Co) + P(NB/VJ) \cdot P(VJ) =$

$= 0{,}4 \cdot 0{,}4 + 0{,}8 \cdot 0{,}3 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}46$

b) Teorema de Bayes.

$P(Ci/B) = \frac{P(B/Ci) \cdot P(Ci)}{P(B)} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{1-0{,}46} = 0{,}44$