OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real *a*:

$$\begin{cases} 3x & +y & -z & =8 \\ 2x & & +az & =3 \\ x & +y & +z & =2 \end{cases}$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro *a*.

b) Resuélvase para *a* = 1.

SOLUCIÓN:

Las matrices asociadas al sistema son:

$$A^* = \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & a & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)}_{A} \;;$$

Para discutir el sistema en función del parámetro a nos apoyaremos en el teorema de Rouché-Fröbenius que se basa en comparar los rangos de A y A permitiéndonos clasificar dicho sistema. En primer lugar, el rango de una matriz es el número de filas (coincidente con el número de columnas) linealmente independientes. Por tanto* $rgA \le rgA^* \le 3$. *Además, gracias a las propiedades de los determinantes, sabemos que* $|A|$ *es 0 si y sólo si en A alguna fila (o columna) es combinación lineal de las otras. Así que nos ayudaremos de determinantes para estudiar el rango de las matrices:*

$$|A| = -2a-4 \Rightarrow -2a-4=0 \Rightarrow \; a=-2$$

a) Discutimos:

- *Si* $a \in \mathbb{R}-\{-2\}$, *entonces* $|A| \ne 0$, *lo que implica que* F_1, F_2 *y* F_3 *son linealmente independientes y por tanto* $\text{rg}(A)=3 \underset{\substack{\uparrow \\ rgA\le rgA^*}}{=} rg(A^*)$ *Por el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es Compatible Determinado.*
- *Si* $a=-2$

  Rango de la matriz A

  $$A^* = \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)}_{A} \Rightarrow |A|=0 \Rightarrow \textit{hay al menos una combinación lineal}$$

  $\Rightarrow rgA \ne 3$

  $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \ne 0 \Rightarrow$ *Luego* F_2 *y* F_1 *son linealmente independientes y por tanto* $rgA=2$

Rango de la matriz Ampliada*:*
No vemos ninguna combinación lineal clara así que hallamos menores de orden 3.

$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$ *, luego las tres filas son linealmente independientes y por tanto* $rgA^* = 3$

Por el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es Incompatible.

b) $a=1$ *estamos en el caso* $a \in \mathbb{R} - \{-2\}$ *luego por el apartado a) sabemos que el sistema es Compatible Determinado, por tanto, resolviendo por Cramer:*

$$(x,y,z) = (2,1,-1)$$

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Sabiendo que la derivada de una función real de variable real f es

$$f'(x) = 3x^2 + 2x$$

a) Calcúlese la expresión de $f(x)$ sabiendo que su gráfica pasa por el punto $(1, 4)$.
b) Calcúlese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto $(1, 4)$.

<u>SOLUCIÓN</u>:

a) *Como tenemos su función derivada, debemos hallar una primitiva que verifique la condición pedida. Así, integrando:*

$$\int 3x^2 + 2x \; dx = x^3 + x^2 + C \quad ;$$

Que su gráfica pase por el punto (1, 4) implica que , $f(1) = 4$ *luego* $1^3 + 1^2 + C = 4 \Rightarrow C = 2$*. Por tanto la función pedida es* $f(x) = x^3 + x^2 + 2$.

b) *En primer lugar, la ecuación de la recta tangente en su forma punto-pendiente es:*

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$
$$x_0 = 1$$
$$f(x_0) \Rightarrow f(1) = 4$$
$$f'(x_0) \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x \underset{Para\,x=1}{\Rightarrow} f'(1) = 5$$

Luego la recta tangente es: $y - 4 = 5(x-1) \Rightarrow y = 5x - 1$

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Sean las funciones reales de variable real

$$f(x) = x^2 - 6x \quad \text{y} \quad g(x) = x - 10$$

a) Represéntense gráficamente las funciones f y g.
b) Calcúlese el área del recinto plano acotado por las gráficas de las funciones f y g.

SOLUCIÓN:

a) *Al tratarse de funciones polinómicas, el dominio de definición son todos los reales.*
f(x): *es una parábola, por tanto bastará con hallar su vértice y los puntos de corte con los ejes para representar su gráfica:*

Puntos de corte con los ejes:

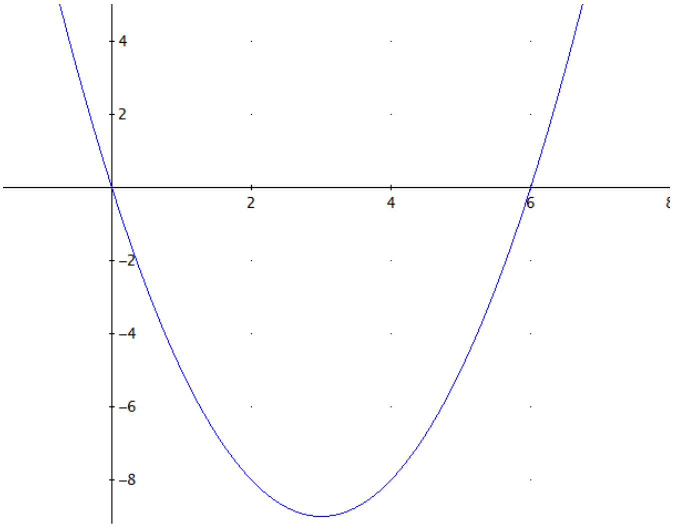
$$OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 6 \Rightarrow (0,\ 0) \ y\ (6,\ 0)$$

$$OY \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (0,\ 0)$$

Vértice:

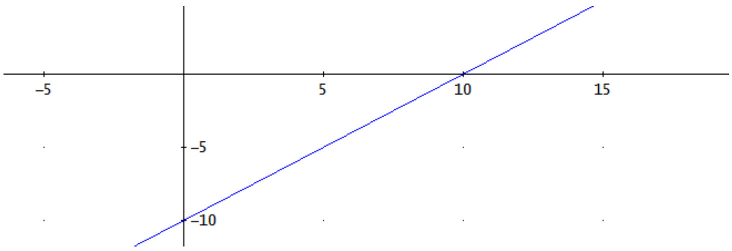
$$f'(x) = 2x - 6 \Rightarrow 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$f''(x) = 2 > 0 \Rightarrow \text{ presenta un mínimo en el punto } (3,\ f(3)) = (3, -9)$$

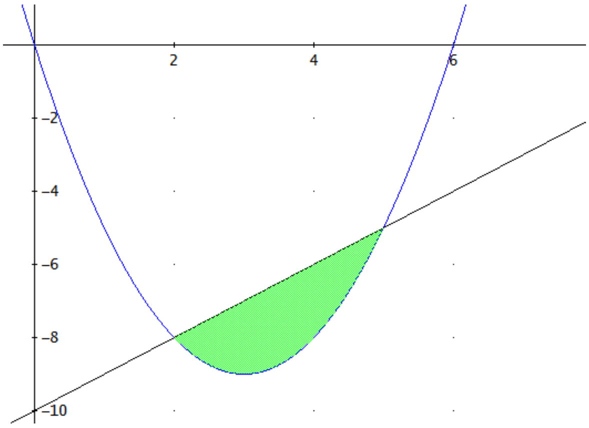


g(x): *Es una recta, así pues bastará con dar dos valores:*

x	*y*
0	*-10*
10	*0*



b) *Superponemos las dos gráficas. Nos piden que hallemos la siguiente área:*



Para hallar dicha área calcularemos la integral definida de la resta de ambas funciones. Vemos que los puntos de corte entre ellas tienen como abscisas x=2 y x=5, estos serán los extremos de integración:

$$\int_2^5 (x-10)-(x^2-6x)\,dx = \int_2^5 -x^2+7x-10\,dx = \left. -\frac{x^3}{3}+\frac{7x^2}{2}-10x \right|_2^5 = \frac{9}{2}\,u^2$$

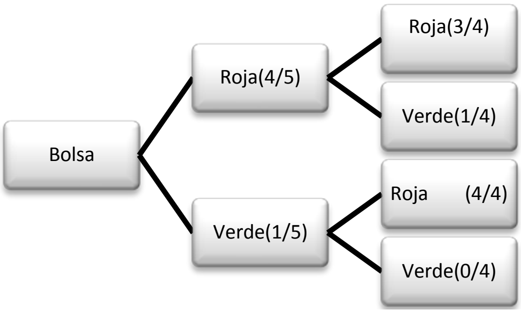
Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)

En una bolsa hay cuatro bolas rojas y una verde. Se extraen de forma consecutiva y sin reemplazamiento dos bolas. Calcúlese la probabilidad de que:

a) Las dos bolas sean del mismo color.

b) La primera bola haya sido verde si la segunda bola extraída es roja.

SOLUCIÓN:



a) $P(\text{Mismo color}) = P(Roja)\cdot P(Roja/Roja) + P(\text{Verde})\cdot P(\text{Verde/Verde}) =$

$$= \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{5}\cdot\frac{0}{4} = \frac{3}{5}$$

b) $$P(1^{\text{a}}\,verde/2^{\text{a}}\,\text{roja}) = \frac{P(1^{\text{a}}\,verde)\cdot P(2^{\text{a}}\,\text{roja}/1^{\text{a}}\,verde)}{P(2^{\text{a}}\,\text{roja})} = \frac{\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{4}}{\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{4}} = \frac{1}{4}$$

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)

El tiempo de reacción ante un obstáculo imprevisto de los conductores de automóviles de un país, en milisegundos (*ms*), se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 250$ *ms*.

a) Se toma una muestra aleatoria simple y se obtiene un intervalo de confianza (701; 799), expresado en *ms*, para μ con un nivel del 95 %. Calcúlese la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.

b) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 25. Calcúlese el error máximo cometido en la estimación de μ mediante la media muestral con un nivel de confianza del 80 %.

SOLUCIÓN:

X= tiempo de reacción ante un obstáculo imprevisto de los conductores de automóviles de un país

$X \sim N(\mu, 250)$

a) *El intervalo de confianza está centrado en la media muestral. Así pues, para calcularla, bastará con hallar el punto medio del intervalo:*

$$\overline{x} = \frac{701+799}{2} = 750$$

Para hallar el tamaño de la muestra nos ayudaremos de la fórmula del intervalo.

$$I = \left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \text{ con } z_{\alpha/2} \text{ tal que } P\left(Z \le z_{\alpha/2}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

$95\% \Rightarrow 1-\alpha = 0,95 \Rightarrow \alpha = 0,05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0,975$. *Así, buscando en la tabla obtenemos* $z_{\alpha/2} = 1,96$

Finalmente,

$$750 - 1,96\frac{250}{\sqrt{n}} = 701 \Rightarrow \sqrt{n} = 10 \Rightarrow n = 100$$

b) *n=25. El error viene dado por:* $\varepsilon = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Hallamos $z_{\alpha/2}$

$$80\% \Rightarrow 1-\alpha = 0,80 \Rightarrow \alpha = 0,2 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,1 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0,9$$

Buscando en la tabla obtenemos $z_{\alpha/2} = 1,28$

Finalmente: $\varepsilon = 1,28\frac{250}{\sqrt{25}} \Rightarrow \varepsilon = 64$