OPCIÓN A

Ejercicio 1 . Calificación máxima: 3 puntos.
Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -mx & + & my & + & z & = & 0\,, \\ x & - & my & + & 3z & = & 4\,, \\ 2x & - & 2y & - & z & = & 0\,, \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutirlo según los valores del parámetro m.

b) (0′5 puntos) Resolverlo en el caso $m = 0$.

c) (0′5 puntos) Resolverlo en el caso $m = 2$.

SOLUCIÓN:

Las matrices asociadas al sistema son:

$$A^* = \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} -m & m & 1 & 0 \\ 1 & -m & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right)}_{A} \ ;$$

Para discutir el sistema en función del parámetro a nos apoyaremos en el teorema de Rouché-Fröbenius que se basa en comparar los rangos de A y A permitiéndonos clasificar dicho sistema. En primer lugar, el rango de una matriz es el número de filas (coincidente con el número de columnas) linealmente independientes. Por tanto, como* $A \subset A^*$ *y sólo hay tres filas, deducimos que* $rgA \le rgA^* \le 3$ ***(1)****. Además, gracias a las propiedades de los determinantes, sabemos que* $|A|$ *es 0 si y sólo si en A alguna fila (o columna) es combinación lineal de las otras. Así que nos ayudaremos de determinantes para estudiar el rango de las matrices:*

$$|A| = -m^2 + 3m - 2 \Rightarrow -m^2 + 3m - 2 = 0 \Rightarrow m = 1,\ \ m = 2$$

a) Discutimos:

- *Si* $m \in \mathbb{R} - \{1,2\}$, *entonces* $|A| \neq 0$, *lo que implica que* F_1, F_2 *y* F_3 *son linealmente independientes y por tanto* $\mathrm{rg}(A) = 3 \underset{\substack{\uparrow \\ rgA \le rgA^*}}{=} rg(A^*)$ *Por el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es Compatible Determinado.*
- *Si* $m = 1$

  Rango de la matriz A

$$A^* = \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right)}_{A} \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow \text{hay al menos una combinación lineal}$$

$\Rightarrow rgA \neq 3$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ *Luego* F_2 *y* F_1 *son linealmente independientes y por tanto* $rgA = 2$

Rango de la matriz Ampliada*:*

Para ver si existe dependencia lineal consideramos menores de orden tres:

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ *luego las tres filas son linealmente independientes y por tanto* $rgA^* = 3$ *. Por el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es Incompatible.*

- *Si* $m = 2$

  Rango de la matriz A

  $A^* = \left(\underbrace{\begin{matrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{matrix}}_{A} \left| \begin{matrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{matrix}\right.\right) \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow$ *hay al menos una combinación lineal* $\Rightarrow rgA \neq 3$

  $\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ *Luego* F_2 *y* F_1 *son linealmente independientes y por tanto* $rgA = 2$

  Rango de la matriz Ampliada*:*

  Como $F_1 = -F_3$ *,* $rgA^* \neq 3$ *y como* $rgA = 2$*, por (1) concluimos que* $rgA^* = 2$

  Por el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es Compatible indeterminado.

b) $m = 0$*, por el apartado* ***a)*** *sabemos que el sistema es compatible determinado. Resolvemos aplicando el método de Cramer:*

$$A^* = \left(\underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{matrix}}_{A} \left| \begin{matrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{matrix}\right.\right)$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{0}{-2} = 0$$

$$(x, y, z) = (4,\ 4,\ 0)$$

c) *$m=2$, por el apartado **a)** sabemos que el sistema es compatible indeterminado. Debemos eliminar una ecuación y parametrizar una incógnita.*

$$\begin{cases} -2x+2y+z=0 \\ x-2y+3z=4 \\ 2x-2y-z=0 \end{cases} \equiv \begin{cases} -2x+2y+z=0 \\ x-2y+3z=4 \end{cases} \underset{z=\lambda}{\Rightarrow} \begin{cases} -2x+2y=-\lambda \\ x-2y=4-3\lambda \end{cases} \Rightarrow B^*=\left(\underbrace{\begin{matrix} -2 & 2 \\ 1 & -2 \end{matrix}}_{B}\left|\begin{matrix} -\lambda \\ 4-3\lambda \end{matrix}\right.\right)$$

Aplicando el método de Cramer, obtenemos

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 4-3\lambda & -2 \end{vmatrix}}{2}=\frac{-8+8\lambda}{2}=-4+4\lambda \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} -2 & -\lambda \\ 1 & 4-3\lambda \end{vmatrix}}{2}=\frac{-8+7\lambda}{2}=-4+\frac{7\lambda}{2}$$

Solución:

$$(x,y,z)=\left(-4+4\lambda,-4+\frac{7\lambda}{2},\lambda\right);\quad \lambda\in\mathbb{R}$$

Ejercicio 2. **Calificación máxima:** 3 puntos.

La recta r pasa por $P(2,-1,0)$ y tiene vector director $(1,\lambda,-2)$; la recta s pasa por $Q(1,0,-1)$ y tiene vector director $(2,4,2)$.

a) (2 puntos) Calcular $\lambda>0$ para que la distancia entre r y s sea $\dfrac{9}{\sqrt{59}}$.

b) (1 punto) Calcular λ para que r sea perpendicular a la recta que pasa por P y Q.

SOLUCIÓN:

a) *En primer lugar, como vemos que los vectores directores de ambas rectas no son proporcionales, descartamos que sean paralelas, así pues, para que exista distancia ente ellas deben cruzarse. Por tanto calculamos la distancia como:*

$$d(r,s)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{v_r}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{v_s}\times\overrightarrow{v_r}\right|}=\frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & -2 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(2\lambda+8)^2+(-6)^2+(-2\lambda+4)^2}}=\frac{-18}{\sqrt{8\lambda^2+16\lambda+116}}\Rightarrow$$

$$\frac{-18}{\sqrt{8\lambda^2+16\lambda+116}}=\frac{9}{\sqrt{59}}\Rightarrow\sqrt{8\lambda^2+16\lambda+116}=-2\sqrt{59}\Rightarrow 8\lambda^2+16\lambda+116=326\Rightarrow$$

$$\lambda^2+2\lambda-15=0\Rightarrow \begin{matrix}\lambda=3\\ \lambda=-5\end{matrix}$$ *Descartamos $\lambda=-5$ pues, según el enunciado, ha de ser un valor positivo. Por tanto $d(r,s)=\dfrac{9}{\sqrt{59}}\Leftrightarrow\lambda=3$.*

b) *Para que dos rectas sean perpendiculares sus vectores directores han de ser ortogonales. Los vectores directores de r y t son $\vec{v}_r=(1,\ \lambda,-2)$ y $\vec{v}_t=\overrightarrow{PQ}=(-1,\ 1,\ -1)$. Por las propiedades del producto escalar, $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0$*

Así pues: $\vec{v}_r\perp\vec{v}_t\Leftrightarrow(1,\ \lambda,-2)\cdot(-1,\ 1,\ -1)=0\Rightarrow-1+\lambda+2=0\Rightarrow\lambda=-1$.

Ejercicio 3. **Calificación máxima: 2** puntos.

a) (0'5 puntos) Estudiar el crecimiento de la función $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$.

b) (1'5 puntos) Demostrar que la ecuación $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 = 0$ tiene una única solución real y localizar un intervalo de longitud 1 que la contenga.

SOLUCIÓN:

a) *Para estudiar el crecimiento de la función analizamos el signo de la primera derivada:*

$f'(x) = 2 + 6x + 12x^2 \Rightarrow 2 + 6x + 12x^2 = 0$ *no tiene soluciones reales, es decir, no tiene máximos ni mínimos. Por tanto, como es continua para todo número real ya que se trata de una función polinómica, sabemos que o siempre crece o siempre decrece. Así:*

	$-\infty$ ∞
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$

Finalmente concluimos que es creciente $\forall x \in \mathbb{R}$

b) *Que* $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 = 0$ *tenga una solución real es lo mismo que exista al menos un* $a \in \mathbb{R}$ *tal que* $f(a) = 0$ *siendo* $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$.
Así pues, buscamos un intervalo de longitud 1 en el que se verifiquen las hipótesis del teorema de Bolzano. Consideramos el intervalo $[-1, 0]$.
$f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$ *es una función continua* $\forall x \in \mathbb{R}$, *luego en particular lo es en el intervalo* $[-1, 0]$. *Además:*

$$\begin{aligned} f(-1) &= 1 - 2 + 3 - 4 < 0 \\ f(0) &= 1 > 0 \end{aligned}$$

, es decir, en los extremos del intervalo la función tiene distinto signo, luego se verifican las hipótesis del teorema de Bolzano que nos asegura que existe al menos un $a \in (-1, 0)$ *tal que* $f(a) = 0$ *como queríamos demostrar.*
Para demostrar que dicha solución es única basta con ver que la función siempre es creciente, cosa que se comprobó en el apartado a).

Ejercicio 4. **Calificación máxima:** 2 puntos.

a) (1 punto) Calcular la integral definida $\int_1^4 (1-x)e^{-x}\,dx$.

b) (1 punto) Calcular $\lim_{x\to+\infty}(1-x)e^{-x}$ y $\lim_{x\to-\infty}(1-x)e^{-x}$.

SOLUCIÓN:

a) *Para resolver esta integral definida, en primer lugar hallaremos una primitiva* $F(x)$ *de* $f(x)=(1-x)e^{-x}$ *y después aplicaremos la regla de Barrow. Así, aplicando el método de integración por partes:*

$$\left\{\begin{matrix} u=1-x & du=-dx \\ dv=e^{-x}dx & v=-e^{-x} \end{matrix}\right\}$$

$$\int(1-x)e^{-x}dx=-(1-x)e^{-x}-\int -e^{-x}\,dx=(-1+x)e^{-x}+e^{-x}=e^{-x}(-1+x+1)=x\cdot e^{-x}=F(x)$$

$$\int_1^4(1-x)e^{-x}dx=F(4)-F(1)=4e^{-4}-e^{-1}.$$

b) $\lim_{x\to\infty}(1-x)e^{-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-x}{e^x}=0$, *pues el denominador crece mucho más deprisa que el numerador.*

$$\lim_{x\to-\infty}(1-x)e^{-x}=\lim_{x\to\infty}(1+x)e^{x}=\infty\cdot\infty=\infty.$$