MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

SOLUCIONES DEL EXAMEN DE EVAU DE JUNIO 2018

OPCION A

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}$

a) Compruébese que B es la matriz inversa de A.
b) Calculése la matriz X tal que $A \cdot X = B$.

Solución

a) $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \left(Adj(A)\right)^T} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} = B$

b) $A \cdot X = B \Longrightarrow X = A^{-1} \cdot B = B \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ -48 & 17 \end{pmatrix}}$

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Sea S la región del plano definida por:

$$x + y \leq 50, \qquad 2x + y \leq 80, \qquad x \geq 0, \qquad y \geq 0.$$

a) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.
b) Obténgase el valor máximo de la función $f(x, y) = 5x + 4y$ en la región S, indicando el punto en el cual se alcanza dicho valor máximo.

Solución

a) Representamos la región S y calculamos las coordenadas de sus vértices:

Vértices: $A(0, 50)$ $B(30, 20)$ $C(40, 0)$ $D(0, 0)$

2018 Rafael Hurtado Virseda

b) Evaluamos la función objetivo $f(x,y) = 5x + 4y$ en cada vértice:

$$\begin{array}{llll} A(0,50) & \Longrightarrow f(0,50) & = 5\cdot 0 + 4\cdot 50 & = 200 \\ \boxed{B(30,20) \Longrightarrow f(30,20) = 5\cdot 30 + 4\cdot 20 = 230} & & & \\ C(40,0) & \Longrightarrow f(40,0) & = 5\cdot 40 + 4\cdot 0 & = 200 \\ D(0,0) & \Longrightarrow f(0,0) & = 5\cdot 0 + 4\cdot 0 & = 0 \end{array}$$

<u>El valor máximo de la función $f(x,y)$ en la región S es 230 y se alcanza en el punto $B(30{,}20)$</u>.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Dada la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{x-1} & \text{si } x \le 2, \\[2ex] \dfrac{3x^2-2x}{x+2} & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

a) Estúdiese si $f(x)$ es continua en $x = 2$.
b) Calcúlese la función derivada de $f(x)$ para $x < 2$.

<u>Solución</u>

a) Estudiamos los límites laterales de la función $f(x)$ en $x = 2$:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{X\to 2^-} \frac{x+2}{x-1} = \frac{2+2}{2-1} = \frac{4}{1} = 4$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{X\to 2^+} \frac{3x^2-2x}{x+2} = \frac{3\cdot 2^2 - 2\cdot 2}{2+2} = \frac{12-4}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

Como $\lim_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim_{X\to 2^+} f(x)$ la función $f(x)$ <u>no es continua en $x = 2$</u>.

b) Calculamos la función derivada de $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ para $x < 2$:

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x-1) - (x+2)\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x-2}{(x-1)^2} = \boxed{-\frac{3}{(x-1)^2}}$$

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)
En una agencia de viajes se ha observado que el 75 % de los clientes acude buscando un billete de transporte, el 80 % buscando una reserva de hotel. Se ha observado además que el 65 % busca las dos cosas. Elegido un cliente de dicha agencia al azar, calcúlese la probabilidad de que:

a) Acuda buscando un billete de transporte o una reserva de hotel.
b) Sabiendo que busca una reserva de hotel, también busque un billete de transporte.

<u>Solución</u>

Consideramos los siguientes sucesos aleatorios:

$B = Acude\ a\ la\ agencia\ de\ viajes\ un\ cliente\ buscando\ billete\ de\ transporte$
$H = Acude\ a\ la\ agencia\ de\ viajes\ un\ cliente\ buscando\ una\ reserva\ de\ hotel$

018 © Rafael del Vado

El enunciado nos proporciona las siguientes probabilidades para estos sucesos:

$$P(B) = 0'75 \qquad P(H) = 0'80 \qquad P(B \cap H) = 0'65$$

a) $\boxed{P(B \cup H) = P(B) + P(H) - P(B \cap H)} = 0'75 + 0'80 - 0'65 = \boxed{0'90}$

b) $\boxed{P\left({}^{B}/_{H}\right) = \frac{P(B \cap H)}{P(H)}} = \frac{0'65}{0'80} = \boxed{0'8125}$

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
La empresa Dulce.SA produce sobres de azúcar cuyo peso en gramos se puede aproximar por una variable aleatoria X con distribución normal con media μ gramos y desviación típica σ = 0'5 gramos.

a) Determínese el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea como mucho de 0'25 gramos con un nivel de confianza del 95 %.
b) Calcúlese la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 25 sobres, la media muestral, $\overline{X}$, pese más de 12'25 gramos, sabiendo que μ = 12 gramos.

<u>Solución</u>

Consideramos la variable aleatoria continua

$$X = Peso\ en\ gramos\ del\ sobre\ de\ azucar\ de\ la\ empresa\ Dulce\ S.A.$$

Por el enunciado sabemos que sigue una distribución de probabilidad normal

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma = 0'50\ gr.)$$

a) El error máximo cometido en la estimación de la media μ es $\boxed{E = Z\alpha_{/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ donde

$E = 0'25\ gr.$
$Z\alpha_{/2} = 1'96$ para un nivel de confianza del 95%
$\sigma = 0'50\ gr.$

Sustituyendo en la fórmula del error:

$$0'25 = 1'96 \cdot \frac{0'50}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1'96 \cdot 0'50}{0'25} \Rightarrow n \geq \left(\frac{1'96 \cdot 0{,}50}{0{,}25}\right)^2 = 15'366 \Rightarrow$$

$\boxed{n = 16}$ *sobres de azucar es el tamaño mínimo que debe tener la muestra.*

b) Para $\boldsymbol{\mu = 12}$ gramos y una muestra aleatoria simple de tamaño $\boldsymbol{n = 25}$ sobres, la media muestral $\overline{X}$ sigue también una distribución normal

$$\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \mathcal{N}\left(12, \frac{0{,}50}{\sqrt{25}}\right)$$

2012 @ Rafael del Vado Vi

La probabilidad de que la media muestral $\overline{X}$ pese más de $12'25$ gramos es

$$P\left(\overline{X} > 12'25\right) =_{tipificamos} P\left(Z \geq \frac{12'25 - 12}{0{,}50/\sqrt{25}}\right)$$

$$= P(Z \geq 2'50)$$

$$= 1 - P(Z \leq 2{,}50)$$

$$=_{tabla\ Z \sim \mathcal{N}(0,1)} 1 - 0'9798 = \boxed{0'0202}$$

2018 @ Rafael del Vado Vírseda

OPCION B

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{rl} x + ay + z &= 1 \\ ax + y + (a-1)z &= a \\ x + y + z &= a+1 \end{array}\right\}$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro a.
b) Resuélvase para $a = 3$.

Solución

a) Consideramos la matriz de coeficientes A asociada al sistema de ecuaciones lineales, y su matriz ampliada $\overline{A}$ con los términos independientes del sistema:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & a-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & a-1 & a \\ 1 & 1 & 1 & a+1 \end{pmatrix}$$

Discutimos el sistema en función de los valores del parámetro a aplicando el *teorema de Rouché-Fröbenius*:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & a-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -a + 1 = 0 \implies \boxed{a = 1}$$

- **Si $a \neq 1$**: $|A| \neq 0 \implies rg(A) = rg(\overline{A}) = 3 \implies \boldsymbol{S.C.D.}$ (**solución única**)
- **Si $a = 1$**:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$rg(A) = 2 \quad \text{pues} \quad |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$rg(\overline{A}) = 3 \quad \text{pues} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$rg(A) \neq rg(\overline{A}) \implies \boldsymbol{S.I.} \text{ (}\boldsymbol{no\ hay\ solución}\text{)}$$

b) Para $\boldsymbol{a = 3}$ sabemos, por el apartado anterior, que el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & + & z & = & 1 \\ 3x & + & y & + & 2z & = & 3 \\ x & + & y & + & z & = & 4 \end{array}\right\}$$

tiene una única solución. Resolvemos el sistema aplicando la *regla de Cramer*:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \boxed{-\frac{13}{2}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \boxed{-\frac{3}{2}} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{|A|} = \boxed{12}$$

2018 @ Rafael del Vado Virseda

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}.$$

a) Calcúlense el dominio y las asíntotas de $f(x)$.
b) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución

a) La función racional $f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}$ no está definida cuando su denominador se anula:

$$(x+1)^2 = 0 \implies x+1 = 0 \implies x = -1 \implies \boxed{Dom(f) = \mathbb{R} - \{-1\}}$$

Asíntotas verticales

$\boxed{x = -1}$ pues $\lim_{x\to -1} \frac{x^3}{(x+1)^2} = \frac{(-1)^3}{(-1+1)^2} = -\frac{1}{0} = -\infty$

Asíntotas horizontales

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{(x+1)^2} =_{IND} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} x = \pm\infty \implies \boldsymbol{No\ hay\ A.H.}$$

Asíntotas oblicuas $y = m \cdot x + n$

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^3}{(x+1)^2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x\cdot(x+1)^2} =_{IND} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x\cdot x^2} = 1$$

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - m\cdot x) \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3}{(x+1)^2} - 1\cdot x \right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - x\cdot(x+1)^2}{(x+1)^2} \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - x^3 - 2x^2 - 1}{(x+1)^2} \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2x^2 - 1}{(x+1)^2} =_{IND} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2x^2}{x^2} = -2 \end{aligned}$$

La recta $\boxed{y = x - 2}$ es una asíntota oblicua de la función $f(x)$.

b) Determinamos los intervalos de crecimiento y decremiento estudiando el signo de la función derivada:

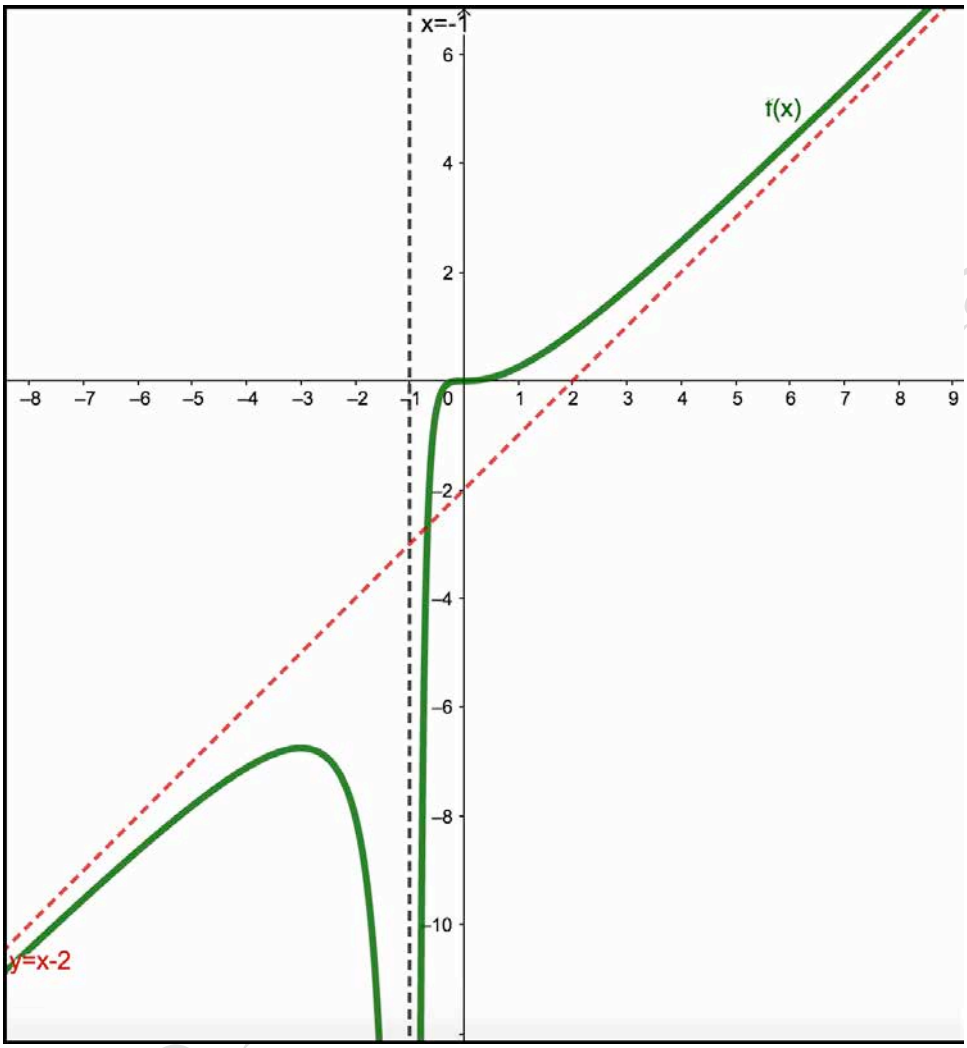
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3x^2\cdot(x+1)^2 - x^3\cdot 2\cdot(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{3x^2\cdot(x+1) - 2x^3}{(x+1)^3} = \frac{x^3 + 3x^2}{(x+1)^3} \\ &= \frac{x^2\cdot(x+3)}{(x+1)^3} = 0 \implies x^2\cdot(x+3) = 0 \implies \boxed{x = 0} \text{ y } \boxed{x = -3} \end{aligned}$$

	$(-\infty, -3)$	$(-3, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

2018 © Rafael del Valle Vírseda

La función **crece** en el intervalo: $\boxed{(-\infty,-3)\cup(-1,+\infty)}$

La función **decrece** en el intervalo: $\boxed{(-3,-1)}$



Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x.$$

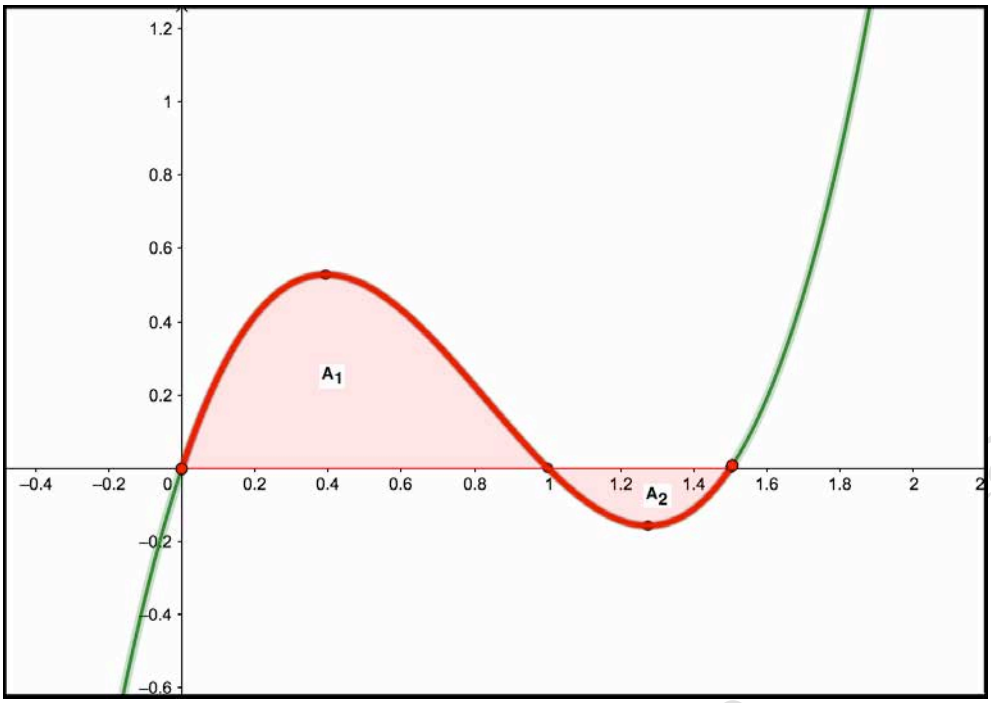
a) Calcúlese el área del recinto acotado limitado por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX.
b) Hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

Solución

a) Representamos gráficamente el recinto acotado pedido en el enunciado:

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x = x\cdot(2x^2 - 5x + 3) = 0 \implies \boxed{x = 0}$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 0 \implies x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{4} = \frac{5 \pm 1}{4} \implies \boxed{x = 1} \text{ y } \boxed{x = \frac{3}{2} = 1'5}$$



$$A_1 = \int_0^1 (2x^3 - 5x^2 + 3x)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{5}{3} + \frac{3}{2} = \frac{1}{3}\ u^2$$

$$A_2 = \left|\int_1^{\frac{3}{2}} (2x^3 - 5x^2 + 3x)\,dx\right| = \left|\left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_1^{\frac{3}{2}}\right|$$

$$= \left|\ \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^4 - \frac{5}{3}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3 + \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{3}\ \right| = \left|\ \frac{81}{32} - \frac{45}{8} + \frac{27}{8} - \frac{1}{3}\ \right|$$

$$= \left|-\frac{5}{96}\right| = \frac{5}{96}\ u^2$$

$$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{3} + \frac{5}{96} = \frac{37}{96} = \boxed{0'3854\ u^2}$$

b) La ecuación de la recta tangente en $x = 0$ es $\boxed{y = f(0) + f'(0)\cdot(x - 0)}$ donde

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f'(x) = 6x^2 - 10x + 3 \ \Rightarrow\ f'(0) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow\ y = 0 + 3\cdot(x - 0)\ \Rightarrow\ \boxed{y\ = 3x}$$

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)
En una comunidad de vecinos en el 70 % de los buzones aparece en primer lugar un nombre masculino y en el 30 % restante un nombre femenino. En dicha comunidad, la probabilidad de que un hombre trabaje es de 0'8 y la probabilidad de que lo haga una mujer es 0'7. Se elige un buzón al azar, calcúlese la probabilidad de que el primer nombre en el buzón corresponda a:

a) Una persona que trabaja.
b) Un hombre, sabiendo que es de una persona que trabaja.

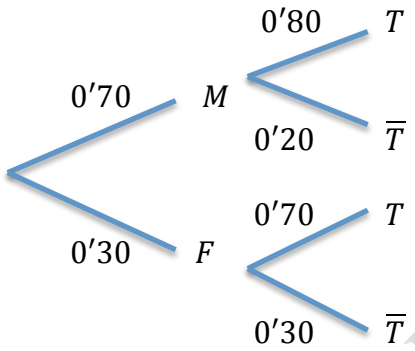
2018 @ Rafael del Valle

Solución

Consideramos los siguientes sucesos aleatorios:

$$M = el\ primer\ nombre\ que\ aparece\ en\ el\ buzón\ es\ masculino$$
$$F = el\ primero\ nombre\ que\ aparece\ en\ el\ buzón\ es\ femenino$$
$$T = es\ una\ persona\ que\ trabaja \qquad \overline{T} = es\ una\ persona\ que\ no\ trabaja$$

Representamos mediante un diagrama de árbol las probabilidades que de estos sucesos se dan en el enunciado:



a) Aplicando el *teorema de la probabilidad total*:

$$P(T) = P(M) \cdot P\left({}^{T}/_{M}\right) + P(F) \cdot P\left({}^{T}/_{F}\right) = 0'70 \cdot 0'80 + 0'30 \cdot 0'70 = \boxed{0'77}$$

b) Aplicando el *teorema de Bayes*:

$$P\left({}^{M}/_{T}\right) = \frac{P\left({}^{T}/_{M}\right) \cdot P(M)}{P(T)} = \frac{0'80 \cdot 0'70}{0'77} = \boxed{0'73}$$

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
El número de descargas por hora de cierta aplicación para móviles, se puede aproximar por una variable aleatoria de distribución normal de media μ descargas y desviación típica σ = 20 descargas.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 40 horas, obteniéndose una media muestral de 99'5 descargas. Determínese un intervalo de confianza al 95 % para μ.
b) Supóngase que μ = 100 descargas. Calcúlese la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 horas, la media muestral, $\overline{X}$, esté entre 100 y 110 descargas.

Solución

Consideramos la variable aleatoria:

$$X = número\ de\ descargas\ por\ hora\ de\ cierta\ aplicación\ para\ móviles$$

La distribución de probabilidad de esta variable aleatoria continua es una distribución normal

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma = 20\ descargas)$$

Rafael del Vado Vírseda

a) El intervalo de confianza para la media μ es

$$\boxed{IC = \left(\overline{X} - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \; ; \; \overline{X} + Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)}$$

donde

$\overline{X} = 99{,}5$ descargas
$Z_{\alpha/2} = 1'96$ para un nivel de confianza del 95%
$\sigma = 20$ descargas
$n = 40$ horas

Sustituyendo en la fórmula del intervalo de confianza se obtiene

$$IC = \left(99'5 - 1'96 \cdot \frac{20}{\sqrt{40}} \; ; \; 99'5 + 1'96 \cdot \frac{20}{\sqrt{40}} \right) = \boxed{(\, 93'302 \; ; \; 105'698 \,)}$$

b) Para $\boldsymbol{\mu = 100}$ descargas y una muestra aleatoria simple de tamaño $\boldsymbol{n = 10}$ horas, la media muestral $\overline{X}$ sigue también una distribución normal

$$\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \mathcal{N}\left(100, \frac{20}{\sqrt{10}}\right)$$

La probabilidad de que la media muestral $\overline{X}$ esté entre 100 y 110 descargas es

$$P\left(100 \leq \overline{X} \leq 110\right) =_{tipificamos} P\left(\frac{100 - 100}{20/\sqrt{10}} \leq Z \leq \frac{110 - 100}{20/\sqrt{10}} \right)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 1'58)$$

$$= P(Z \leq 1'58) - P(Z \leq 0)$$

$$=_{tabla\ Z \sim \mathcal{N}(0,1)} 0'9429 - 0'500 = \boxed{0'4429}$$

2018 @ Rafael del Vado Vírseda