Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II

A.1 a) $A = A^{-1} \Rightarrow A^2 = I$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+1 & 0 & 2a \\ 0 & b^2 & 0 \\ 2a & 0 & 1+a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$a^2+1 = 1 \Rightarrow a^2 = 0 \Rightarrow \boxed{a=0}$

$b^2 = 1 \Rightarrow \boxed{b = \pm 1}$

b) $a = b = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad |A| = 6; \quad (\mathrm{Adj}\, A) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ -1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$$

A.2 a) $f(x) = \dfrac{x^3+4}{x^2-1}$ $\quad$ Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

A. verticales: $x = 1$ y $x = -1$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \pm\infty; \quad \lim_{x \to -1} f(x) = \pm\infty$$

A. Horizontales: No hay.

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{\pm\infty}{\infty} \simeq \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{x^2} = \pm\infty$$

A. oblicua: $y = x$

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3+4}{x^3-x} = \frac{\infty}{\infty} \simeq \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$$

$$n = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^3+4}{x^2-1} - x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x+4}{x^2-1} = 0$$

b) $f'(x) = \dfrac{3x^2(x^2-1)-2x(x^3+4)}{(x^2-1)^2} = \dfrac{x^4-3x^2-8x}{(x^2-1)^2}$

$\left.\begin{array}{l} f'(0)=0 \\ f(0)=-4 \end{array}\right\} \quad r_t \equiv y+4 = 0(x-0) \Rightarrow \boxed{y=-4}$

A.3 $\quad \dfrac{x^2-ax \;\; \Big| \;\; \ln x}{1}$

a) Dom $f(x)=\mathbb{R}$.

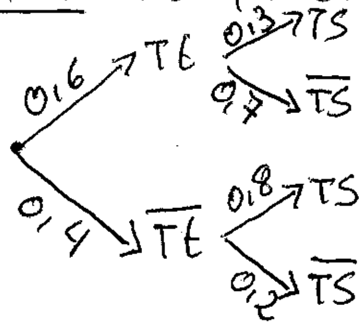
Continua en $x=1$

$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1-a \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \ln x = \ln 1 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} (x^2-ax) = 1-a \end{array}\right\}$ $f(x)$ es continua en $x=1 \Rightarrow$ en $\mathbb{R}$ si $1-a=0$; $\boxed{a=1}$

b) $x=-1$; $x=0 \Rightarrow f(x)=x^2-x$ y eje OX; $x^2-x=0 \begin{array}{l} \nearrow x=0 \\ \searrow x=1 \end{array}$

$A = \displaystyle\int_{-1}^{0} (x^2-x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} = 0-\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{5}{6}u^2}$

A.4 $Tt = \{\text{Teletrabajo}\}$; $TS = \{\text{Trastornos del sueño}\}$



a) $P(\overline{TS} \cap Tt) = P(Tt)\cdot P(\overline{TS}/Tt) =$
$= 0{,}6 \cdot 0{,}7 = \underline{0{,}42}$

b) $P(\overline{Tt}/\overline{TS}) = \dfrac{P(\overline{Tt}\cap\overline{TS})}{P(\overline{TS})} =$
$= \dfrac{0{,}4\cdot 0{,}2}{0{,}6\cdot 0{,}7+0{,}4\cdot 0{,}2} = \dfrac{4}{25} = \underline{0{,}16}$

A.5 X = Uso redes sociales por menores de 14 años.

a) $n=500 \Rightarrow \hat{p} = \dfrac{320}{500} = 0{,}64$

$1-\alpha = 0{,}96 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0{,}98 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}055 \Rightarrow E = 0{,}0441$

$IC = (0{,}64-0{,}0441,\ 0{,}64+0{,}0441) = (0{,}5959,\ 0{,}6841)$

b) $p = 0{,}5$

$$\left.\begin{array}{l} 1-\alpha = 0{,}95 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96 \\ E \leq 0{,}05 \end{array}\right\} \quad 0{,}05 \geq 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}25}{n}}$$

$$\sqrt{n} \geq 19{,}6 \Rightarrow n \geq 384{,}16$$

$\underline{n \geq 385}$ menores de 14 años

B.1

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & a^2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right) ; \quad |A| = -1 + 2a^2 + 1 - 2 + a^2 - 1 =$$

$$3a^2 - 3 = 0 \Rightarrow a = \pm 1.$$

a) Caso 1°: si $a \neq \pm 1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow Rg\,A = Rg\,A^* = 3 \Rightarrow$ sistema compatible determinado

caso 2°: si $a = 1 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow Rg\,A < 3$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow Rg\,A = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow Rg\,A^* = 2$$

sistema compatible indeterminado

Caso 3°: Si $a = -1 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow Rg\,A < 3$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Igual matriz que en caso 2°
$Rg\,A = Rg\,A^* = 2 <$ n° incógnitas
sistema compatible indeterminado

b) Para $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado

$$\left.\begin{array}{l} x + y - z = -1 \\ x - y + z = 3 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \\ \text{si } z = \lambda \Rightarrow y = -1 + \lambda - 1 \Rightarrow y = -2 + \lambda \end{array}$$

Soluciones: $x = 1$; $y = -2 + \lambda$; $z = \lambda$; $\lambda \in R$.

B.2 x = kg almendras

y = kg avellanas

$f(x,y) = x + 2y$ (Beneficio)

$x \leq 50$

$y \leq 25$

$x \geq 1{,}5\, y$

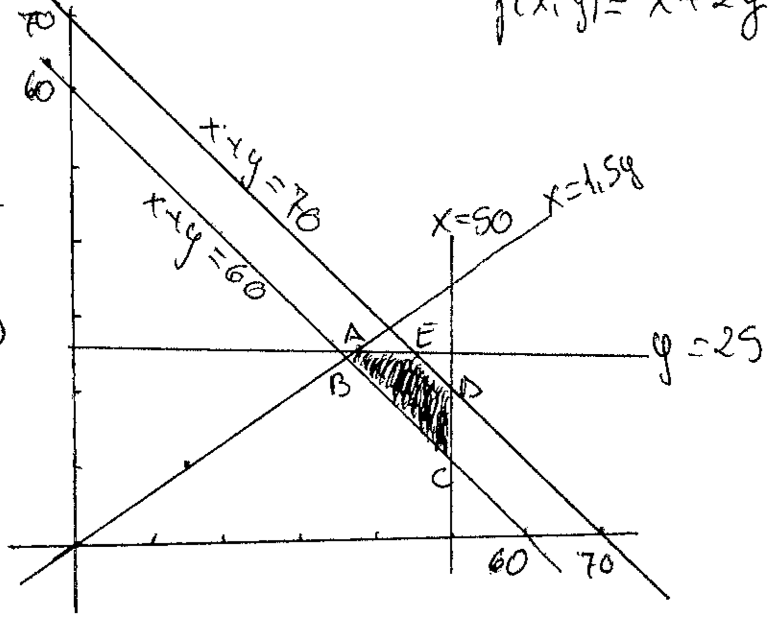
$x + y \geq 60$

$x + y \leq 70$

$x \geq 0$; $y \geq 0$

$x = 1{,}5\, y$

x	y
0	0
37,5	25



A (37,5, 25) $\rightsquigarrow$ f(A) = 87,5 €

B (36, 24) $\rightsquigarrow$ f(B) = 84 €

C (50, 10) $\rightsquigarrow$ f(C) = 70 €

D (50, 20) $\rightsquigarrow$ f(D) = 90 €

E (45, 25) $\rightsquigarrow$ f(E) = 95 €

Para obtener el máximo beneficio debe mezclar 45 Kg de almendras con 25 Kg de avellanas con esta mezcla obtiene un beneficio de <u>95 €</u>

B.3 $f(x) = (x^2 - 3)\, e^x$; $f'(x) = 2x \cdot e^x + e^x(x^2 - 3) = e^x(x^2 + 2x - 3)$

a) $f'(x) = 0 \Rightarrow (x^2 + 2x - 3) = 0 \Rightarrow x = -3$; $x = 1$ puntos críticos.

signo $f'(x)$: $-\infty$ + -3 − 1 + $+\infty$; $\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$

$f(x)$ crece en $(-\infty, -3) \cup (1, \infty)$

$f(x)$ decrece en $(-3, 1)$

Como $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} \Rightarrow$ tiene un máximo relativo en $(-3, f(-3)) = (-3, 6e^{-3})$ y un mínimo relativo en $(1, f(1)) = (1, -2e)$

b) $\int_1^2 e^x f(x)\,dx = \int_1^2 (x^2-3)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x\right]_1^2 = \left(\frac{8}{3}-6\right) - \left(\frac{1}{3}-3\right)$

$= \boxed{-\frac{2}{3}}$

B.4 $P(A) = 0{,}5$; $P(\bar{B}/A) = 0{,}4 = \frac{P(\bar{B}\cap A)}{0{,}5} = 0{,}4 \Rightarrow P(\bar{B}\cap A) = 0{,}2$

$P(A\cup B) = 0{,}9$

a) $P(B/\bar{A}) = \frac{P(B\cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{0{,}4}{0{,}5} = \boxed{0{,}8}$

Como $P(\bar{B}\cap A) = P(A) - P(A\cap B) \Rightarrow P(A\cap B) = 0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}3$

Como $P(A\cup B) = 0{,}9 = 0{,}5 + P(B) - 0{,}3 \Rightarrow P(B) = 0{,}7$

$P(B\cap\bar{A}) = P(B) - P(A\cap B) = 0{,}7 - 0{,}3 = 0{,}4$

b) Como $P(A\cap B) = 0{,}3$ y $P(A)\cdot P(B) = 0{,}5\cdot 0{,}7 = 0{,}35$

Al ser $P(A\cap B) \neq P(A)\cdot P(B)$ los sucesos A y B son dependientes.

B.5 X = consumo de pan diario $\rightarrow N(\mu, 20)$

$\sigma = 20g$

a) $\left.\begin{array}{l} n = 36 \\ \mu = 120g \end{array}\right\}$ $P(\bar{X} \le 125) = P\left(Z \le \frac{125-120}{20/6}\right) = P(Z \le 1{,}5)$

$= \boxed{0{,}9332}$

b) $n = 81$

$IC = (117{,}3444 , 124{,}6556) \Rightarrow A = 7{,}3112 \Rightarrow E = 3{,}6556$

$3{,}6556 = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{20}{9} \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}64502 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}95$

$\Rightarrow \alpha = 0{,}1 \Rightarrow$ Nivel de confianza $= 0{,}9 = \boxed{90\%}$